装　订　线

省、市

学　校

考　号

姓　名

联系电话

辅导老师

折　密

叠　封

线　线

装　订　线

第十届“创新杯”全国数学邀请赛(复试)
初中一年级试卷

一、选择题($5'\times 8=40'$)　以下每题的四个选项中,仅有一个是正确的,请将表示正确答案的字母填在下面的表格中.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案								

1. 如果两个有理数的和是正数,那么这两个数

A. 一定都是正数　　B. 一定都是负数

C. 一定都是非负数　　D. 至少有一个是正数

2. 已知 n 是整数,现有三个代数式:①$2n+3$,②$4n-1$,③$n(n+1)+1$,其中能表示“任意奇数”的代数式的个数是

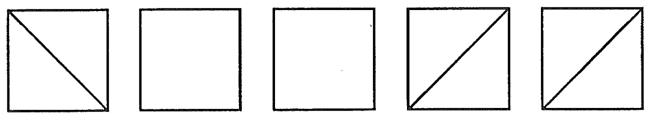
A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. 在海上,灯塔位于一艘船的北偏东 40°方向,那么这艘船位于这个灯塔的

A. 南偏西 50°方向　　B. 南偏西 40°方向

C. 北偏东 50°方向　　D. 北偏东 40°方向

4. 设一个多面体从前面、后面、左面、右面、上面看到的图形分别为



(上面五个正方形的边长都是 1)该多面体的体积为

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{5}{6}$

5. 某轮船往返于 A、B 两地之间,设轮船在静水中的速度不变,那么,当水的流速由原来的 0 增大至静水中船速的一半时,轮船往返一次所用的时间

A. 增加$\frac{1}{3}$　　B. 增加$\frac{1}{4}$　　C. 减少$\frac{1}{3}$　　D. 减少$\frac{1}{4}$

6. 当时间是 3 点 40 分时,时针与分针所成夹角的度数是

A. 110°　　B. 120°　　C. 130°　　D. 150°

7. 有 A、B、C 三个学校的足球队参加单循环足球赛,每两队都比赛一场. 比赛结果是:A 队两战两胜,共失球 2 个;B 队共进球 5 个,失球 6 个;C 队有一场踢平,共进球 3 个,失球 8 个. 则 A 队与 C 队比赛时进球数之比一定是

A. A 平 C　2:2　　B. A 胜 C　4:2　　C. A 胜 C　6:1　　D. A 胜 C　5:0

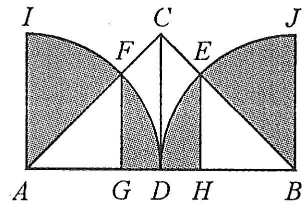
8. 自然数 1 ~ 2012 中,数字 6 一共出现(　　)次.

A. 599　　B. 600　　C. 601　　D. 602

二、填空题($5'\times 8=40'$)

9. a,b 是数轴上两点,且 $a<b$,点 x 到 a 的距离是点 x 到 b 的距离的 2 倍,则 $x=$________.

10. 如图,弧 IFD 与弧 JED 是分别以 A、B 为圆心,以 AD、BD 为半径的圆弧,已知 $AD=DB=DC=2$,且 $AGDHB$、AFC 与 BEC 分别是三条直线段. 线段 IA、FG、CD、EH、JB 都分别垂直于 AB. 则图中阴影部分的面积是________.



11. 有两组数,第一组的平均数为 12.8,第二组的平均数 10.2,这两组数的总平均数为 12.02,那么,第一组数的个数与第二组数的个数比值为________.

12. 设$(a-b)^2=4(1-a)(b-1)$,则 $a+b=$________.

13. 在春运高峰时,某客运中心售票大厅站满等待买票的旅客. 为保证售票大厅的旅客安全,大厅入口处旅客排队以等速进入大厅按次序等待买票,买好票的旅客及时离开大厅. 按照这样的安排,如果开出 10 个售票窗口,5 小时可使大厅内所有旅客买到票;如果开出 12 个售票窗口,3 小时可使大厅内所有旅客买到票,假设每个窗口售票速度相同. 如果大厅入口处旅客速度增加到原速度的 1.5 倍,在 2 小时内使大厅中所有旅客买到票,按这样的安排至少应开________售票窗口.

14. 一张旧发票上写有 72 瓶饮料,总价为 x67.9y 元,由于两头的数字模糊不清,分别用 x,y 表示,每瓶饮料的单价也看不清了,那么 $x=$________.

15. 已知 10 个互不相等的正有理数，其中每 9 个的和都是分母为 11 的真分数，则这 10 个有理数的和为__________.

16. 设 a,b,c,d,e,f,g,h,i 是 9 个非零的不同数字，则 $a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}}+d+\dfrac{1}{e+\dfrac{1}{f}}+g+\dfrac{1}{h+\dfrac{1}{i}}$ 可取得的最大值是__________.

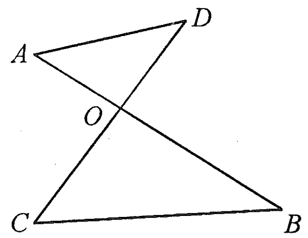
三、解答题(第 17 题 20 分，第 18、19 题各 25 分，共 70 分)

17. (20 分) 如图 1，线段 AB、CD 相交于点 O，连接 AD、CB，我们把这样的图形称之为"8 字形". 在图 1 的条件下，分别作 $\angle DAB$、$\angle BCD$ 的平分线 AP 和 CP，相交于点 P，且与 CD、AB 分别相交于 M、N.

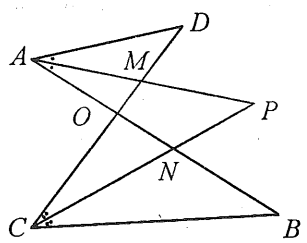
(Ⅰ) 在图 1 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$ 满足怎样的关系，直接写出其结果；

(Ⅱ) 试考察图 2，写出其中"8 字形"的个数；

(Ⅲ) 如图 2，若 $\angle D=\alpha$，$\angle B=\beta$，求 $\angle P$ 的值，要求写出推导过程；

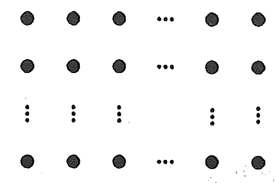


(图1)



(图2)

18. (25 分) 如图，将 35 个身高各不相同的人排成 m 行、n 列的矩形方队. 把每列中最矮的人选出，这些人中最高的记为 a；把每行中最高的人选出，这些人中最矮的记为 b.



(Ⅰ) a 是否有可能比 b 高；

(Ⅱ) a 和 b 是否有可能相等.

在(Ⅰ)、(Ⅱ)中，如果可能，请举一例；如果不可能，请证明.

19. (25 分) 一只青蛙，位于数轴上的点 a_k，跳动一次后达到 a_{k+1} 已知 a_k、a_{k+1} 满足 $|a_{k+1}-a_k|=1$. 我们把青蛙从 a_1 开始，经 $(n-1)$ 次跳动的位置依次记作 A_n：$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$.

(Ⅰ) 写出一个 A_5，使其 $a_1=a_5=0$，且 $a_1+a_2+\cdots+a_5>0$；

(Ⅱ) 若 $a_1=13$，$a_{2000}=2012$，求 a_{1000} 的值；

(Ⅲ) 对于整数 $n(n\geq 2)$，如果存在一个 A_n 能同时满足如下两个条件：

① $a_1=0$，

② $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$.

求整数 $n(n\geq 2)$ 被 4 除的余数，并说明理由.

装　订　线

省、市 ______

学　校 ______

考　号 ______

姓　名 ______

联系电话 ______

辅导老师 ______

折　密　叠　封　线　线

装　订　线

第十届“创新杯”全国数学邀请赛(复试)
初中二年级试卷

一、选择题($5'\times 8=40'$)　以下每题的四个选项中,仅有一个是正确的,请将表示正确答案的字母填在下面的表格中.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案								

1. 下面有 3 个结论:(1)存在两个不同的无理数,它们的差是整数;(2)存在两个不同的无理数,它们的积与和都是整数;(3)存在两个不同的非整数的有理数,它们的和与商都是整数,其中正确的结论有

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

2. A 和 B 用同样的速度、同时开始数“数”,A 从 110 开始,向前每隔 2 读一个数,也就是说他读 110,112,114,…;而 B 从 953 开始,向后每隔 5 读一个数,也就是说,他读 953,948,943,…;他们同时说出的两个最接近的数的差是

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

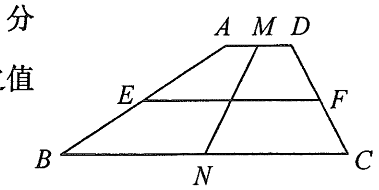
3. 将一个圆形纸片用直线划分成大小不限的若干小纸片,如果分成的小纸片不少于 2012,那么至少要划的直线的条数是

A. 61　　B. 62　　C. 63　　D. 64

4. 黑板上写有从 1 开始的若干个连续的奇数 1,3,5,7,9,11,13…擦去其中的一个奇数后,剩下的所有奇数之和为 2012. 那么,擦去的奇数是

A. 13　　B. 11　　C. 15　　D. 9

5. 在梯形 $ABCD$ 中,$AD\parallel BC$,$\angle B=30°$,$\angle C=60°$,E、N、F、M 分别为 AB、BC、CD、DA 的中点,已知 $BC=7$,$MN=3$,则 EF 之值为



A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

6. 已知 x,y,z 均为实数,$x>0$,$y>0$,且 $a=\frac{(y-z)^2}{x}-\frac{(x-z)^2}{y}$,$b=x-y$,则下面的结论中一定成立的是

A. 若 $x<y$,则 $a\geqslant b$　　B. $a\leqslant b$　　C. $a\geqslant b$　　D. 若 $x<y$,则 $a<b$

7. 已知 $\begin{cases}\dfrac{x+9y}{9x+7y}=\dfrac{m}{n} & (1)\\ \dfrac{x+9y}{x+10y}=\dfrac{m+an}{bm+cn} & (2)\end{cases}$

如果满足(1)式的一切实数 x,y,m,n 也满足(2)式,那么 $a+b+c$ 的值为

A. 0　　B. $\frac{41}{37}$　　C. $\frac{9}{74}$　　D. $\frac{73}{74}$

8. 已知 $abc=1$,$a+b+c=2$,$a^2+b^2+c^2=3$,则 $\frac{1}{ab+c-1}+\frac{1}{bc+a-1}+\frac{1}{ca+b-1}$ 的值为

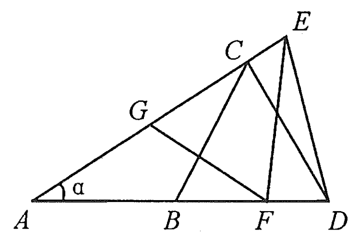
A. 1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. $-\frac{2}{3}$

二、填空题($5'\times 8=40'$)

9. 若 $x^2+8y=-7$,$y^2-6z=-2$,$z^2-10x=-41$,则 $x^2+y^2+z^2=$__________.

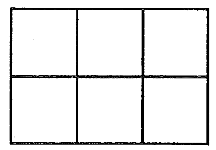
10. 一个自行车轮胎,若把它安装在前轮,则自行车行驶 5000km 后报废;若把它安装在后轮,则自行车行驶 3000km 后报废,行驶一定路程后可以交换前、后轮胎. 如果交换前、后轮胎,要使一辆自行车的一对新轮胎同时报废,那么这辆车将能行驶__________km.

11. 如右图,在 $\triangle ADE$ 中,G,C 是 AE 上的点,B,F 是 AD 上的点,且 $AB=BC=CD=DE=EF=FG=GA$,若 $\angle A=\alpha$,则 $\alpha=$__________度.



12. 已知对任意正整数 n 都有 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n=n^3$,则 $\frac{1}{a_2-1}+\frac{1}{a_3-1}+\frac{1}{a_4-1}+\cdots+\frac{1}{a_{2012}-1}=$__________

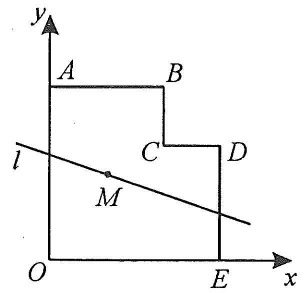
13. 如右图所示,在 3×2 的矩形方格纸上,各个小正方形的边长为 1,并称其顶点为格点,则以格点为顶点的等腰直角三角形的个数为__________.



14. 三边长都是整数的直角三角形叫做勾股三角形. 若一个勾股三角形有一条边长为 12. 那么这样的勾股三角形共有__________个.

15. 设有2012个数:$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{2012}$,它们中的每个数只能取0,1,2三个数中的一个. 如果有 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{2012}=a$,$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_{2012}^2=b$,那么 $x_1^3+x_2^3+x_3^3+\cdots+x_{2012}^3=$ ________(用a,b表示)

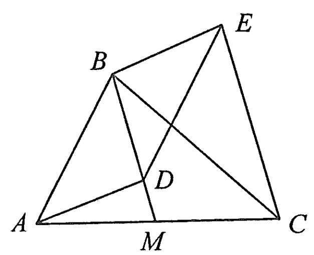
16. 如图,在平面直角坐标系xOy中,多边形$OABCDE$的顶点坐标分别是$O(0,0)$,$A(0,6)$,$B(4,6)$,$C(4,4)$,$D(6,4)$,$E(6,0)$. 若直线l经过点$M(2,3)$,且将多边形$OABCDE$分割成面积相等的两部分,则直线l的函数表达式是________.



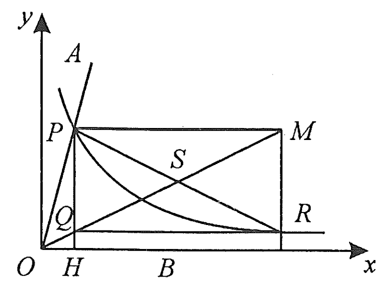
三、解答题(第17题20分,第18、19题25分,共70分)

17. 设a,b,c,d,e,f都是正整数,且$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}>\frac{e}{f}$,若$af-be=1$,求证:$d\geqslant b+f$.

18. 点D在$\triangle CBA$的中线BM上,过D作AB的平行线,过C作BM的平行线,二者交于E点. 求证:$BE=AD$.



19. "三等分角"是数学史上一个著名问题,但仅用尺规不可能"三等分角",下面是数学家帕普斯借助函数给出的一种"三等分锐角"的方法(如图所示):将给定的锐角$\angle AOB$置于直角坐标系中,边OB在x轴上、边OA与函数$y=\frac{1}{x}$的图象交于点P,以点P为圆心,$2PO$为半径作圆交$y=\frac{1}{x}$的图象于点R(点R在$\angle AOB$的内部),分别过点P和R作x轴和y轴的平行线,两直线相交于点M,连结OM得到$\angle MOB$,则$\angle MOB=\frac{1}{3}\angle AOB$,要明白帕普斯方法,请研究以下问题:



(1)设$P(a,\frac{1}{a})$,$R(b,\frac{1}{b})$,求直线OM对应的函数表达式(用含a,b的代数式表示.)

(2)分别过点P和R作y轴和x轴的平行线,两直线相交于点Q,请说明Q点在直线OM上,并据此证明$\angle MOB=\frac{1}{3}\angle AOB$.

装 订 线

省、市

折 学 校 密

考 号

叠 封

姓 名

联系电话

线 线

辅导老师

装 订 线

第十届“创新杯”全国数学邀请赛

初中三年级试卷

一、选择题(共8小题,每小题5分,共40分)

以下各题的四个选项中,有且仅有一个是正确的,请将表示正确答案的字母填在下面的表格中:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案								

1. 方程组 $\begin{cases}(x-1)(y-1)=-1\\ x^2y+xy^2=3\end{cases}$ 实数解有

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

2. 已知$\triangle ABC$为锐角三角形,$AB>AC$,E、F分别是边AB、AC上的点,且$\angle BCE=\angle CBF=\frac{1}{2}\angle A$,那么线段$BE$与$CF$的大小关系是

A. $BE>CF$　　B. $BE=CF$　　C. $BE<CF$　　D. 不能确定

3. 已知关于x的方程$x^2-2(m+3)x-6m^2=0$两个实数根的绝对值的比为$2:3$,则m的值为

A. 2或-3　　B. -2或3　　C. 2或6　　D. -2或-6

4. 若$f(x^2+1)=x^4+5x^2+3$,则$f(x^2-1)=$

A. x^4-x^2-3　　B. x^4+x^2-3　　C. x^4+x^2+3　　D. x^4-5x^2+3

5. 已知抛物线$y=ax^2+bx+c$不经过第二象限,在x轴上截得线段的长为2,且$a+b+c=0$,那么它的顶点坐标是

A. $(2,a)$　　B. $(2,-a)$　　C. $(b,\frac{1}{a})$　　D. $(-\frac{1}{b},-\frac{1}{a})$

6. 一个三角形的两条高分别为4、12,第三条高也是整数,则第三条高的长度最大值为

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

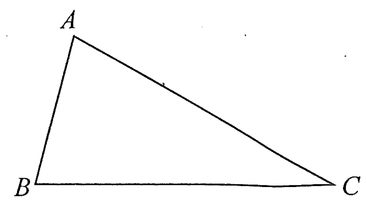
7. 在$\triangle ABC$中,如果$AC=2AB$,那么$\angle B$与$2\angle C$的大小关系是

A. $\angle B>2\angle C$

B. $\angle B=2\angle C$

C. $\angle B<2\angle C$

D. 不确定



8. 已知凸四边形内接于圆,四条边依次为$5(\sqrt{7}-1)$,12,$5(\sqrt{7}+1)$,16,那么它的四条边与劣弧构成的四个弓形的面积和(π取3.14)为

A. 171　　B. 143　　C. $96\sqrt{7}$　　D. $75\sqrt{7}$

二、填空题(共8小题,每小题5分,共40分)

9. 已知a,b是互不相等的实数,那么关于x的方程$\frac{x+a}{x+b}+\frac{3x+3b}{x+a}=\frac{7}{2}$的解(用含$a,b$的式子表示)为__________.

10. 已知:在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,CD是高,CE是角平分线,若$\angle DCE=30°$,则$\angle BAC$的度数是__________.

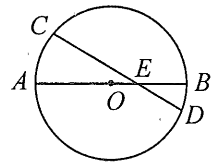
11. 方程$\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}+\sqrt{\frac{x-1}{x}}=x$实数解是$x=$__________.

12. 已知$a>b>c$,且$a+b+c=0$,抛物线$y=ax^2+2bx+c$与x轴交于A、B两点. 则线段AB长度的范围是__________.

13. 在以平行四边形的顶点和中心这五个点中任意三点为顶点的所有三角形中,任意取出两个,这两个三角形面积相等的概率为__________.

14. 已知等腰三角形的两边是关于x的方程$x^2-6x+a=0$的两个实数根,那么a的取值范围是__________.

15. 如右图,已知AB是$\odot O$的直径,弦CD交AB于E,$AB=\frac{2\sqrt{5}}{3}$,$\angle AEC=30°$,则$CD^2-AE\cdot BE=$__________.



16. 有16个石子,一个人分若干次取完,每次可以取1个,2个或3个,但是每次取完后都不能留下质数个石子(石子之间不作区分,只考虑石子的个数),则取完16个石子的方法有__________种.

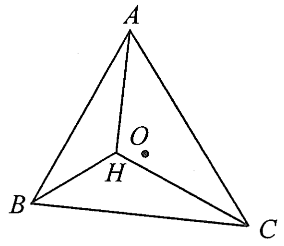
三、解答题(共3小题,第17题20分,第18题25分,第19题25分,共70分)

17. 已知:在$\triangle ABC$中,$\angle A$为锐角,$AB=AC$,D是边BC上的一点,且$BD=2CD$,AD的延长线交$\triangle ABC$的外接圆于点E,过C作CE的垂线交AE于F点.

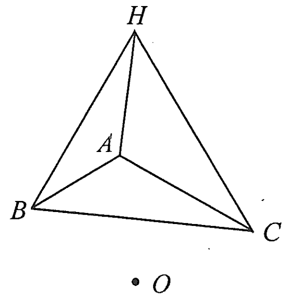
证明:(1)点F在线段AD内(点F异于点A和点D).

(2)$\angle BFD=2\angle CFD$.

18. 如图1,图2,在△ABC中,H是垂心,O是外心,AH等于△ABC的外接圆⊙O的半径,边AB、AC的长度为整数,且周长小于26,面积为$10\sqrt{3}$,求边BC的长度.



(图1)



(图2)

19. 已知a,b,c都是正整数,且$a<b<c$,$(ab-1)(bc-1)(ca-1)$被abc整除. 试判断:长度为a,b,c的三条线段能否构成一个三角形?长度为$\sqrt{a}$,$\sqrt{b}$,$\sqrt{c}$的三条线段能否构成一个三角形?若能,求出它的面积;若不能,请说明理由.

装 订 线

省、市

学 校

考 号

姓 名

联系电话

辅导老师

装 订 线

第十届"创新杯"全国数学邀请赛(复试)
高中一年级试卷

一、选择题($5'\times8=40'$) 以下每题的四个选项中,有且仅有一个是正确的,请将表示正确答案的字母填在下面的表格中。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案								

1. 已知函数 $f(x)=(x+1)(x-a)$ 为偶函数,则 $a=$

A. 2　　B. 1　　C. -1　　D. -2

2. 已知 $f(x)$ 在 R 上为减函数,则满足 $f(|\frac{1}{x}|)<f(1)$ 的实数 x 的取值范围是

A. $(-1,0)\cup(0,1)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C. $(-1,1)$　　D. $(0,1)$

3. 已知集合 $P=\{y|y=\frac{1}{x},0<x<\frac{1}{3}\}$, $U=\{y|y=\ln x,x>e\}$, 则 $C_UP=$

A. $(1,+\infty)$　　B. $(1,3]$　　C. $(3,+\infty)$　　D. $(1,3)$

4. 对于函数 $g(x)$ 的 $a\cos x+bx+c(a,c\in R,b\in Z)$,选取 a,b,c 的一组值计算 $g(1)$ 和 $g(-1)$,所得正确结果,一定不可能是

A. 100 和 106　　B. 106 和 98　　C. 3 和 5　　D. 7 和 12

5. 设 $a,b,c\in R$, $f(x)=(x+c)(x^2+bx+a)$, $g(x)=(cx+2)(ax^2+bx+1)$,集合 $P=\{x|f(x)=0,x\in R\}$, $Q=\{x|g(x)=0,x\in R\}$. 若 $|P|$, $|Q|$ 分别表示集合 P,Q 中元素的个数,则下列结论中不可能成立的是

A. $|P|=1$ 且 $|Q|=0$　　B. $|P|=1$ 且 $|Q|=1$

C. $|P|=2$ 且 $|Q|=2$　　D. $|P|=2$ 且 $|Q|=3$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 的中点, $AM=1$, 点 P 在 AM 上且 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PM}$, 则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 等于

A. $\frac{4}{9}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $-\frac{4}{3}$　　D. $-\frac{4}{9}$

7. 对于满足条件 $abcde=a+b+c+d+e$ 的正整数 a,b,c,d,e, $\max\{a,b,c,d,e\}$ 的最大值、最小值依次是

A. 6,2　　B. 5,3　　C. 3,2　　D. 5,2

8. 已知函数 $f(x)=\lg x+x(x\geq1)$,对于曲线 $y=f(x)$ 上纵坐标成等差数列的三个点 A,B,C,则

A. $\triangle ABC$ 是等腰钝角三角形　　B. $\triangle ABC$ 是非等腰的钝角三角形

C. $\triangle ABC$ 是等腰锐角三角形　　D. $\triangle ABC$ 是非等腰的锐角三角形

二、填空题($5'\times8=40'$)

9. 若函数 $f(x)=\sin\omega x(0<w<6)$ 在区间 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上单调递增,在区间 $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减,则 $\omega=$______.

10. 已知函数 $f(x)=a^x+x-b(a>0$ 且 $a\neq1,x\in R)$,当 $1.5<a<2$, $3<b<4$ 时,函数 $f(x)$ 的零点 $x_0\in(n,n+1)$, $n\in N^*$,则 $n=$______.

11. 若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$, $\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1}{3}$, $\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\sin(\alpha+\frac{\beta}{2})=$______.

12. 设 $1=a_1\leq a_2\leq a_3\leq a_4\leq a_5\leq a_6\leq a_7$,其中 a_1,a_3,a_5,a_7 成公比为 q 的等比数列, a_2,a_4,a_6 成公差为 2 的等差数列,则 q 的最小值是______.

13. 设集合 $S=\{a,b,c,d,e,f\}$, $T=\{d,e,f,g,h\}$,则满足 $A\subseteq S$ 且 $A\cap T\neq\phi$ 的集合 A 的个数是______.

14. 关于 x 的方程:

$\sqrt{3+4x}+\sqrt{4+5x}+\sqrt{5+6x}=\sqrt{3-4x}+\sqrt{4-5x}+\sqrt{5-6x}$ 的解集是______.

15. 在 $\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,已知 $\sin A+\sin C=p\sin B(p\in R)$ 且 $ac=\frac{1}{4}b^2$,角 B 为钝角,则 p 的取值范围是______.

16. 设 $A(0,0)$, $B(5,0)$, $C(t+5,3)$, $D(t,3)(t\in Z)$,记 $N(t)$ 为平行四边形 $ABCD$ 内部(不含边界)整点的个数(纵、横坐标均为整数的点,称为整点),则 $N(t)$ 的值等于______.

三、解答题(第 17 题 20 分,第 18、19 题各 25 分,共 70 分)

17. 在数 1 和 9 之间插入 n 个实数,使这 $n+2$ 个实数成等差数列.

(Ⅰ)设插入的 n 个实数之和为 $a_n(n\geq1)$,求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(Ⅱ)设 $b_n=\tan a_n\cdot\tan a_{n+1}(n\in N^*)$,求数列的前 n 项和 S_n.

18. 设 A_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $A_n=\frac{3}{2}(a_n-1)(n\in N^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=4n+1(n\in N^*)$.

(Ⅰ)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(Ⅱ)若 $d\in\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}\cap\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$, 称 d 为数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的公共项. 将数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的公共项,按它们在原数列中的先后顺序排成一个新数列 $\{d_n\}$,试判断数列 $\{d_n\}$ 是什么数列,并求出通项公式 d_n.

(Ⅲ)若数列 $\{d_n\}$ 中的第 n 项是数列 $\{b_n\}$ 中的第 r 项, B_r 为数列 $\{b_n\}$ 的前 r 项的和, D_n 为数列 $\{d_n\}$ 的前 n 项的和,求出 B_r 和 D_n,并比较 B_r 与 D_n 的大小关系.

19. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R,对任意 $x_1,x_2\in R$ 都满足

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2),$$

当 $x>0$ 时, $f(x)>0$.

(Ⅰ)判断函数 $f(x)$ 的奇偶性和单调性.

(Ⅱ)是否存在这样的实数 m,当 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时,不等式 $f(\cos2\theta-3)+f(4m-2m\sin\theta)>0$ 对所有 θ 恒成立. 如存在,求出 m 的取值范围;若不存在,说明理由.

装 订 线

省、市

折 学 校 密

考 号

叠 封

姓 名

联系电话

线 线

辅导老师

装 订 线

第十届“创新杯”全国数学邀请赛(复试)
高中二年级试卷

一、选择题($5'\times 8=40'$) 以下每题的四个选项中,有且仅有一个是正确的,请将表示正确答案的字母填在下面的表格中。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案								

1. 定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(-x)$,且在$[-1,0]$上为增函数,则以下结论中正确的是

①$f(x)$是周期函数; ②$f(x)$的图像关于 $x=1$ 对称;

③$f(x)$在$[4,5]$上是增函数; ④$f(x)$在$[5,6]$上是减函数.

A. ①④ B. ①② C. ③④ D. ②③

2. 已知点 $A(1,0)$,$B(0,1)$,$C(2\sin\theta,\cos\theta)$,若$(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}=1$(其中 O 为坐标原点),则 $\sin2\theta$ 等于

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $-\frac{1}{4}$ D. $-\frac{3}{4}$

3. 已知 $A(1,1)$,$B(3,3)$,P 点在 x 轴上运动,当$\angle APB$ 最大时,P 点横坐标为

A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{3}$

4. 若直线 $2ax-by+2=0(a>0,b>0)$被圆 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 截得弦长为 4,则$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$的最小值为

A. $4\sqrt{2}+1$ B. $3+2\sqrt{2}$ C. 4 D. $2\sqrt{3}+1$

5. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=0$,$a_{n+1}=\frac{a_n-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n+1}$,则 $a_{2012}=$

A. 0 B. $\sqrt{3}$ C. $-\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

6. 三棱锥 $S-ABC$ 底面为正三角形,A 点在侧面 SBC 上的射影 H 是$\triangle SBC$ 的垂心,且二面角 $H-AB-C$大小为 $30°$,则 $SA:AB=$

A. $1:\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3}:1$ C. $2:\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}:2$

7. 斜率为$\sqrt{3}$的直线交椭圆 $3x^2+y^2=6$ 于 A、B 两点,O 为坐标原点,则$\triangle OAB$ 面积最大值为

A. $\sqrt{5}$ B. 4 C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

8. 直角坐标系中,不等式组$\begin{cases}x^2+y^2-4x-6y+4\leqslant 0\\ |x-2|+|y-3|\geqslant 3\end{cases}$所构成的平面区域的面积为

A. $6\pi+3$ B. $9\pi-12$ C. $6\pi-8$ D. $9\pi-18$

二、填空题($5'\times 8=40'$)

9. 比较三数 $\sin1$,$3\sin\frac{1}{3}$,$5\sin\frac{1}{5}$的大小:________________.

10. 已知二次函数$f(x)$满足$f(-1)=0$,且对一切 $x\in R$ 有 $x\leqslant f(x)\leqslant\frac{x^2+1}{2}$恒成立,则$f(x)=$ ________________.

11. 已知不等式$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{12}\log_a(a-1)+\frac{2}{3}$对一切 $n\geqslant 2$ 的自然数都成立,则实数 a 的取值范围为__________.

12. 无盖的圆柱形容器底面半径为 1,母线长为 3,将盛满水的容器缓慢倾斜,当水剩到原来的$\frac{2}{3}$时,圆柱母线与水平面所成的角为__________.

13. 已知 99 个数 $a_1,a_2,\cdots a_{99}$不是 1 就是 -1,则 $a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_1a_{99}+a_2a_3+a_2a_4+\cdots+a_2a_{99}+a_3a_4+a_3a_5+\cdots+a_{98}a_{99}$的最小值为__________.

14. 已知圆 $x^2+y^2=r^2$ 与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$相交于 P 点,F_1、F_2 为椭圆的两焦点且 $PF_1\perp PF_2$. 已知$\triangle PF_1F_2$ 面积为 26,椭圆长轴长为 15,则 $a+b+r=$__________.

15. 已知抛物线 $y=x^2-1$ 上一点 $B(-1,0)$,若抛物线上存在两点 P、Q,且使得 $PQ\perp PB$,则 Q 点横坐标取值范围为________________.

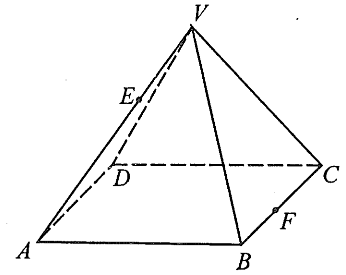
16. 函数$f(x)=\frac{1+x^2}{1+x+x^2}+\frac{x}{1+x^2}$的最大值、最小值分别为__________和__________.

三、解答题(第 17 题 20 分,第 18、19 题各 25 分,共 70 分)

17. 在正四棱锥 $V-ABCD$ 中,E、F 分别在 VA 和 BC 上,已知 $VE=\frac{1}{2}EA$.

(1)F 在何处时 $EF\perp AD$?

(2)若$\angle VAB=60°$,求二面角 $C-VA-B$ 的平面角的余弦值.



18. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=-1$，$a_{n+1}=2a_n+3n-4(n\in N^*)$

(1)求数列$\{a_n\}$通项公式.

(2)求和$S_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$.

19. 已知O为坐标原点，定点$A(1,0)$，$B(0,-2)$，动点C满足$\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，其中$\alpha-2\beta=1$.

(1)求C点的轨迹方程.

(2)设C点轨迹与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$交于两点$M$、$N$，且以$MN$为直径的圆过原点，

求证：$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$为定值.

(3)在(2)的条件下，若椭圆离心率不大于$\frac{\sqrt{3}}{2}$，求椭圆实轴长的取值范围.

装 订 线 密 封 线 装 订 线

(密封线内不要答题)

线 折 叠 线