第十届“创新杯”全国数学邀请赛（复试）
初中一年级试卷标准答案

一、选择题（$5'\times 8=40'$）

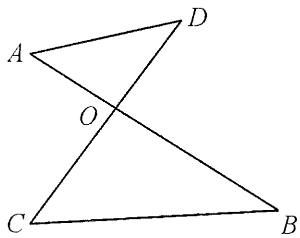
题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	B	D	A	C	D	C

二、填空题（$5'\times 8=40'$）

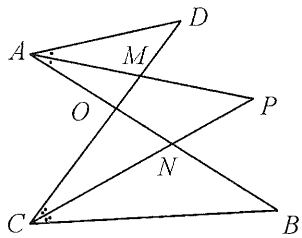
题号	9	10	11	12	13	14	15	16
答案	$2b-a$ 或$\frac{1}{3}(2b+a)$	$2\pi-2$	$7:3$	2	18	3	$\frac{5}{9}$	$25\frac{620}{1001}$

三、解答题（第 17 题 20 分，第 18、19 题各 25 分，共 70 分）

17. 解：



（图1）



（图2）

（Ⅰ）$\angle A+\angle D=\angle C+\angle B$.（图 1） …$5'$

（Ⅱ）按“8 字形”中的交点分类计数：（图 2）

以 M 为交点的“8 字形”1 个；

以 O 为交点的“8 字形”4 个；

以 N 为交点的“8 字形”1 个，共 6 个 …$12'$

（Ⅲ）在“8 字形”$APCB$ 中，$\angle PAB+\angle P=\angle B+\angle PCB$…①

在“8 字形”$CPAD$ 中，$\angle PCD+\angle P=\angle D+\angle PAD$…②

因为 $\angle PAB=\angle PAD$，$\angle PCB=\angle PCD$，

所以由① + ②得 $\angle P=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ …$20'$

18. 解：

（Ⅰ）若 a,b 在同一行，或同一列，则 $a \leqslant b$； …5′

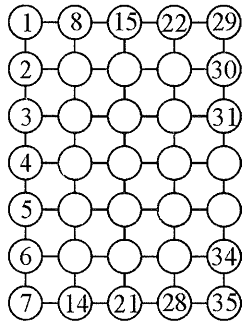
若 a 和 b 不在同一行，也不在同一列，记 a 所在列与 b 所在行相交的人为 x，

因为 a 为 a,x 所在列中最矮的人，所以 $a<x$；

又因为 b 为 b,x 所在行中最高的人，所以 $b>x$；于是 $a<x<b$. …10′

综上，不可能有 $a>b$. …12′

（Ⅱ）将 35 个身高各不相同的人，按身高由小到大编号为 1，2，3，…33，34，35，不妨将这些人排成 7 行，5 列矩形方阵（如右图） …17′



显然第 1 列到第 5 列中最矮的人依次为 1、8、15、22 和 29，其中最高为 29，即 a 是 29 号； …20′

第 1 行到第 7 行中最高的人依次为 29，30，31，…，35，其中最矮的为 29，即 b 是 29 号，此时，a,b 是同一人， …23′

因此，a,b 的身高可能相等. …25′

19. 解：

（Ⅰ）$a_1=a_5=0$，即从原点出发，经过 4 次跳动后回到原点，这就只能是两次向右，两次向左. 为保证 $a_1+a_2+\cdots+a_5>0$，只须将“向右”安排在前就可以了. 比如

按“右、右、左、左”的方式跳动，即得满足条件的一个 A_5：0，1，2，1，0； …5′

按“右、左、右、左”的方式跳动，即得满足条件的另一个 A_5：0，1，0，1，0.

（Ⅱ）$a_1=13, a_{2000}=2012$，意味着，从 a_1 经 1999 步到达 a_{2000}. 不妨设向右跳了 x 步，向左跳了 y 步，则

$\begin{cases} x+y=1999 \\ 13+x-y=2012 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=1999 \\ y=0 \end{cases}$ 可见，它一直在向右跳，没有向左跳. …10′

于是，$a_{1000}=13+999=1012$. …15′

（Ⅲ）设 A_n 同时满足两个条件：①$a_1=0$，②$a_1+a_2+\cdots+a_n=0$.

由于 $a_1=0$，所以从原点出发，经过 $(k-1)$ 步到达 a_k. 假定这 $(k-1)$ 步中，向右跳了 x_k 步，向左跳了 y_k 步. 于是 $a_k=x_k-y_k, x_k+y_k=k-1$，

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=(x_2-y_2)+(x_3-y_3)+\cdots+(x_n-y_n)$$

$$=2(x_2+x_3+\cdots+x_n)-[(x_2+y_2)+(x_3+y_3)+\cdots+(x_n+y_n)]$$

$$=2(x_2+x_3+\cdots+x_n)-\frac{n(n-1)}{2}$$ …20′

由于 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，所以 $n(n-1)=4(x_2+x_3+\cdots+x_n)$，即 $4 \mid n(n-1)$，

因此 n 被 4 除的余数为 0 或 1. …25′

（反之，对于整数 $n(n\geqslant 2)$，若 n 被 4 除的余数为 0 或 1，也可以证明，一定存在一个 A_n 同时满足条件①、②. 没有证明，不扣分！）

第十届"创新杯"全国数学邀请赛(复试)
初中二年级试卷标准答案

一、选择题($5'\times 8=40'$)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	C	A	D	A	B	D

二、填空题($5'\times 8=40'$)

题号	9	10	11	12	13	14	15	16
答案	50	3750	$\frac{180}{7}$	$\frac{2011}{6036}$	50	4	$3b-2a$	$y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$

三、解答题(第 17 题 20 分,第 18、19 题各 25 分,共 70 分)

17. 证明:因 a,b,c,d,e,f 均大于 0,且 $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}>\frac{e}{f}$,故 $ad-bc>0,cf-de>0$. …5′

又 a,b,c,d,e,f 都是整数,故 $ad-bc\geqslant 1,cf-de\geqslant 1$. …10′

又 $af-be=1$,

于是 $d=d(af-be)=f(ad-bc)+b(cf-de)\geqslant f\cdot 1+b\cdot 1=b+f$ …20′

18. 证明:过 M 作 $MF/\!/AB$ 交 CE 于 F,则四边形 $MDEF$ 为平行四边形, …5′

$\therefore DE/\!/MF,DE=MF$.

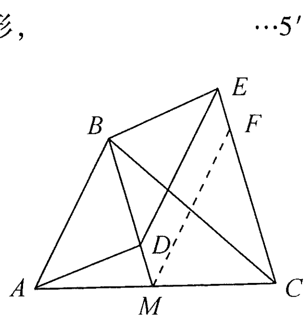
又因 $AB/\!/MF,BM/\!/FC,AM=MC$,

$\therefore \triangle ABM\cong\triangle MFC$. …15′

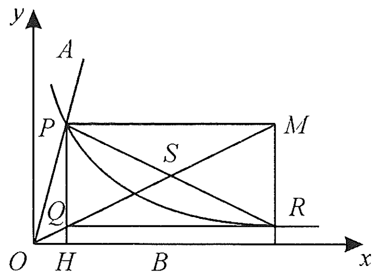
$\therefore AB/\!/MF,AB=MF$,

从而 $MF/\!/DE,MF=DE$,

$\therefore ABED$ 为平行四边形,$BE=AD$. …25′



19. 解：



(1)设直线 OM 的函数关系式为 $y=kx$，$P(a,\frac{1}{a})$，$R(b,\frac{1}{b})$，则 $M(b,\frac{1}{a})$，

$\therefore k=\frac{1}{a}\div b=\frac{1}{ab}$

$\therefore$ 直线 OM 的函数关系式为 $y=\frac{1}{ab}x$. …8′

(2)$\because Q$ 的坐标为$(a,\frac{1}{b})$，满足 $y=\frac{1}{ab}x$，

$\therefore Q$ 在直线 OM 上. …12′

$\because$ 四边形 $PQRM$ 是矩形，

$\therefore SP=SQ=SR=SM=\frac{1}{2}PR$.

$\therefore 2\angle SQR=\angle PSO$ …16′

$\because PR=2OP$，

$\therefore PS=OP=\frac{1}{2}PR$，

$\therefore \angle POS=\angle PSO$. …20′

又 $\angle POS=2\angle SQR$，

$\because QR /\!/ OB$，

$\therefore \angle SOB=\angle SQR$，

$\therefore \angle POS=2\angle SOB$，

$\therefore \angle SOB=\frac{1}{3}\angle AOB$. …25′

第十届“创新杯”全国数学邀请赛
初中三年级试题参考答案

一、选择题（$5'\times 8=40'$）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	D	B	B	C	A	B

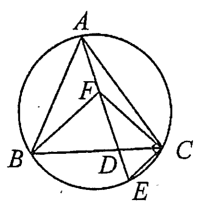
二、填空题（$5'\times 8=40'$）

题号	9	10	11	12
答案	$a-2b$ 或 $2a-3b$	20 或 100	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\sqrt{3}<AB<2\sqrt{3}$

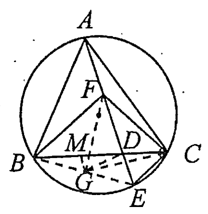
题号	13	14	15	16
答案	$\frac{3}{7}$	$0<a\leqslant 9$	$\frac{5}{3}$	15

三、解答题（第 17 题 20 分；第 18 题、19 题各 25 分，共 70 分）

17. 证明：



（图1）



（图2）

（1）如图 1，$\angle BCE=\angle BAE<\angle BAC$，又 $\angle BAC$ 为锐角，所以 $\angle BCE$ 为锐角， …3′

又弧 $\overset{\frown}{ABE}$ 为优弧（$\because BD=2DC$），所以 $\angle ACE$ 为钝角. …6′

由于 $\angle ECF=90°$，因此射线 CF 位于 $\angle ACB$ 的内部，故点 F 在线段 AD 内，且点 F 异于点 A 和点 D. …10′

（2）如图 2，连 BE，过 F 作 $FG\perp BE$ 于点 G.

在 $Rt\triangle FGE$、$Rt\triangle FCE$ 中，$\angle AEB=\angle ACB=\angle ABC=\angle AEC$，$FE$ 公共，

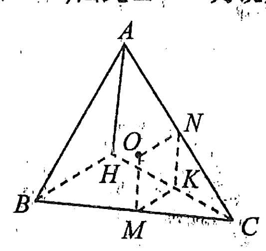
所以 $\triangle FGE\cong\triangle FCE$，因此，$\angle EFC=\angle EFG$. …15′

连接 DG，则 $DG=DC=\frac{1}{2}BD$. 取 BD 的中点 M，连 GM，则 $DG=DC=\frac{1}{2}BD=DM$. 所以，

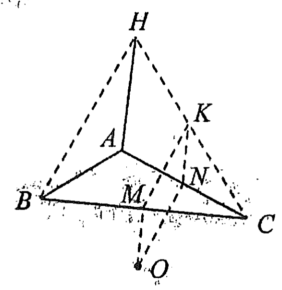
$MG\perp GC$，又 $FE\perp GC$（$\because FG=FC,EG=EC$），从而 $MG\parallel FE$，G 为 BE 的中点. 因此，

$\angle BFE=2\angle EFG=2\angle CFD$. …20′

18. 解：显然，$\angle BAC\neq 90°$，因此 $\angle BAC$ 为锐角或钝角.



（图1）



（图2）

如图 1，图 2，设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，外接圆半径为 R，过 O 作 $OM\perp BC$ 于点 M，$ON\perp AC$ 于点 N，取 CH 的中点 K，连 MK，NK，则四边形 $OMKN$ 为平行四边形.

所以，$OM=NK=\frac{1}{2}AH=\frac{1}{2}R$，从而 $\angle BOC=120°$，故 $\angle BAC=60°$ 或 $120°$ …8′

又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC$，从而 $10\sqrt{3}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$，因此 $AB\cdot AC=40$，

由于 AB，AC 的长为整数，所以 AB，AC 的长可能为 1，40；2，20；4，10 或 5，8.

又周长小于 26，因此 AB，AC 的长可能为：①4，10 或②5，8 …12′

（Ⅰ）当 $\angle BAC=60°$ 时，则 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos 60°=AB^2+AC^2-AB\cdot AC$，

$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-AB\cdot AC}$

①AB，AC 长为 4 或 10 时，$BC=2\sqrt{19}$，由于 $AB+AC+BC=14+2\sqrt{19}<26$，

故 $BC=2\sqrt{19}$ 符合要求.

②AB，AC 长为 5 或 8 时，$BC=7$，由于 $AB+AC+BC=20<26$，

故 $BC=7$ 符合要求. …18′

（Ⅱ）当 $\angle BAC=120°$ 时，则 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos 120°=AB^2+AC^2+AB\cdot AC$，

$BC=\sqrt{AB^2+AC^2+AB\cdot AC}$

①AB，AC 长为 4 或 10 时，$BC=\sqrt{156}>12$，周长 >26，不可，弃之.

②AB，AC 长为 5 或 8 时，$BC=\sqrt{129}<12$，周长 <26，符合要求. …24′

综上述，BC 长度为 $2\sqrt{19}$，7 或 $\sqrt{129}$ …25′

19. 解：因为$(ab-1)(bc-1)(ca-1)=abc(abc-a-b-c)+(ab+bc+ca)-1$被$abc$整除，所以

$(ab+bc+ca)-1$被abc整除，即$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}$为正整数，其中$a,b,c$为正整数. …3′

①求a：

由于$1\leqslant a<b<c$，从而$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>\frac{1}{c}>0$，所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{3}{a}$，

当$a\geqslant3$时，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{3}{a}\leqslant1$，$0<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}<1$，

故$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}$不为整数，因此$1\leqslant a\leqslant2$. …5′

如果$a=1$，则$1+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{bc}$为正整数，从而$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{bc}$为非负整数，

由$a=1$，得$b\geqslant2,c\geqslant3$，得：$0\leqslant\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{bc}=\frac{c-1}{bc}+\frac{1}{c}<\frac{c-1}{c}+\frac{1}{c}=1$，

所以$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{bc}=0$，$c+b=1$与$c+b\geqslant5$矛盾，故$a\neq1$，从而$a=2$， …8′

②求b：

由于$a=2$，知$b\geqslant3$，如果$b\geqslant4$，则$c\geqslant5$，

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20}<1$，

$0<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}<1$，与$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}$为正整数矛盾，故$b=3$， …13′

③求c：

由于$a=2,b=3$，所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{c}-\frac{1}{6c}=\frac{5c+5}{6c}=1+\frac{5-c}{6c}$为正整数，

因此$c=5$.

综上述，知$a=2,b=3,c=5$ …18′

④由于$a=2,b=3,c=5$得$a+b=c$，所以以长度为a,b,c的三条线段为边不能组成三角形. …21′

⑤由于$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}>\sqrt{5}$，即$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$，

所以以长度为$\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$的三条线段为边可以组成三角形.

由于$(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2=(\sqrt{5})^2$，即$(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2=(\sqrt{c})^2$，所以这个三角形是两直角边长为$\sqrt{a}$和$\sqrt{b}$的直角三角形，其面积为$S=\frac{1}{2}\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ …25′

第十届“创新杯”全国数学邀请赛(复试)
高中一年级试卷标准答案

一、选择题($5'\times 8=40'$)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	B	D	D	D	D	B

二、填空题($5'\times 8=40'$)

题号	9	10	11	12
答案	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$	$\sqrt{3}$
题号	13	14	15	16
答案	56	$\{0\}$	$(1,\frac{\sqrt{6}}{2})$	8 或 10

三、解答题(第 17 题 20 分,第 18、19 题各 25 分,共 70 分)

17. 解:(Ⅰ)$a_n=\frac{(1+9)\cdot(n+2)}{2}-(1+9)=5n\quad(n\in N^*)$ …4′

(Ⅱ)$\because\ \tan5=\tan(a_{n+1}-a_n)=\frac{\tan a_{n+1}-\tan a_n}{1+b_n}$

$\therefore\ b_n=\frac{1}{\tan5}(\tan a_{n+1}-\tan a_n)-1\quad(n\geqslant1)$ …10′

因此 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k=\frac{1}{\tan5}\sum\limits_{k=1}^{n}(\tan a_{k+1}-\tan a_k)-n$

$=\frac{1}{\tan5}(\tan a_{n+1}-\tan a_1)-n$ …16′

$=\frac{1}{\tan5}[\tan5(n+1)-\tan5]-n$

故 $S_n=\frac{\tan5(n+1)}{\tan5}-(n+1)\quad(n\geqslant1)$. …20′

18. 解:(Ⅰ)由于 $A_n=\frac{3}{2}(a_n-1)$,令 $n=1$ 得 $a_1=A_1=\frac{3}{2}(a_1-1)\Rightarrow a_1=3$.

当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=A_n-A_{n-1}=\frac{3}{2}(a_n-a_{n-1})\Rightarrow a_n=3a_{n-1}$. 所以数列$\{a_n\}$是首项 a_1 为 3,公比 $q=3$ 的等比数列,因此通项公式为 $a_n=3^n(n\in N^*)$. …6′

(Ⅱ)先观察发现规律:$a_1=3,a_2=9,a_3=27,a_4=81,\cdots$. 又 $b_n=4n+1(n\in N^*)$,所以 $a_1\notin$ 数列$\{b_n\}$,$a_2\in$ 数列$\{b_n\}$,$a_3\notin$ 数列$\{b_n\}$,$a_4\in$ 数列$\{b_n\}$,$\cdots$.

猜想:$a_{2n}\in$ 数列$\{b_n\}$,$a_{2n-1}\notin$ 数列$\{b_n\}(n\in N^*)$.

证明:由于 $a_{2n-1}=3^{2n-1}=3\cdot(8+1)^{n-1}$ 被 4 除余 3$(n\in N^*)$,所以 $a_{2n-1}\notin$ 数列$\{b_n\}$ 10′ $(n\in N^*)$. 又 $a_{2n}=3^{2n}=(8+1)^n$ 被 4 除余 1,所以 $a_{2n}\in$ 数列$\{b_n\}$,$(n\in N^*)$. 因此 $a_{2n}=3^{2n}$ $(n\in N^*)$是数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的公共项,即 $d_n=3^{2n}(n\in N^*)$,故数列$\{d_n\}$是首项为 9,公比 $q=9$ 的等比数列,其通项公式为 $d_n=3^{2n}(n\in N^*)$. …14′

(Ⅲ)$d_n=b_r\Leftrightarrow3^{2n}=4r+1\Leftrightarrow r=\frac{3^{2n}-1}{4}\in N^*,(n\in N^*)$.

因此 $B_r=\frac{(b_1+b_r)r}{2}=\frac{(b_1+d_n)r}{2}=\frac{(5+3^{2n})\cdot\frac{1}{4}(3^{2n}-1)}{2}=\frac{(3^{2n}+5)(3^{2n}-1)}{8}$ …18′

$D_n=\frac{d_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{9(9^n-1)}{8}=\frac{9(3^{2n}-1)}{8}$. …22′

从而 $B_r-D_n=\frac{(3^{2n}+5)(3^{2n}-1)-9(3^{2n}-1)}{8}=\frac{(3^{2n}-4)(3^{2n}-1)}{8}>0(n\in N^*)$,

故 Br 大于 $D_n(n\in N^*)$. …25′

19. 解:(Ⅰ)令 $x_1=x_2=0$,由 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ 得 $f(0)=f(0)+f(0)$,即 $f(0)=2f(0)\Rightarrow f(0)=0$.

对任意 $x\in R$,$0=f(0)=f(x-x)=f(x)+f(-x)\Rightarrow f(-x)=-f(x)$,因此,函数 $f(x)$ 是 R 上的奇函数. …4′

对任意二实数 x_1,x_2,若 $x_2>x_1$,则 $x_2-x_1>0$,从而 $f(x_2-x_1)>0,\Rightarrow f(x_2)+f(-x_1)>0\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)>0$,即 $f(x_2)>f(x_1)$,

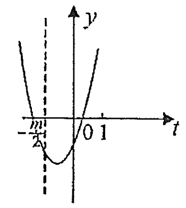
因此,函数 $f(x)$ 是 R 上的单调递增函数. …8′

(Ⅱ)若存在实数 m,对所有 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$,$f(\cos2\theta-3)+f(4m-2m\sin\theta)>0$ 恒成立. $\Rightarrow$ $f(\cos2\theta-3)>-f(4m-2m\sin\theta)=f(2m\sin\theta-4m)$ 恒成立 $\Rightarrow\cos2\theta-3>2m\sin\theta-4m$,即 $1-2\sin^2\theta-3>2m\sin\theta-4m$,

即 $\sin^2\theta+m\sin\theta-2m+1<0$ 恒成立. …10′

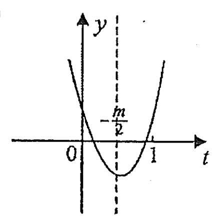
令 $t=\sin\theta,\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\Rightarrow t\in[0,1]$.

因此问题转化为:求 m 的取值范围,使得函数
$g(t)=t^2+mt-2m+1<0,t\in[0,1]$ 恒成立.(*) …12′



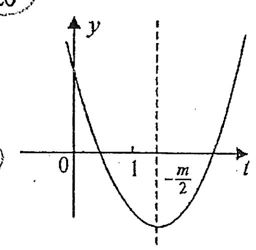
由于 $g(t)=(t+\frac{m}{2})^2-\frac{m^2}{4}-2m+1<0,t\in[0,1]$ 恒成立,根据此抛物线对称轴 $t=-\frac{m}{2}$ 的不同位置,分类研究:

① $-\frac{m}{2}<0$,即 $m>0$ 时,函数 $g(t)(t\in[0,1])$ 的最大值为 $g(1)$,
由(*)知 $g(1)<0$,即 $2-m<0\Rightarrow m>2$. …16′



②当 $0\leqslant-\frac{m}{2}\leqslant1$,即 $-2\leqslant m\leqslant0$ 时,$g(t)(t\in[0,1])$ 的最大值为 $g(1)$ 或 $g(0)$,

由(*)知 $\begin{cases}g(0)<0\\g(1)<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2m+1<0\\2-m<0\end{cases}\Rightarrow m>2$,与 $-2\leqslant m\leqslant0$ 矛盾. …20′



③当 $-\frac{m}{2}>1$,即 $m<-2$ 时,$g(t)(t\in[0,1])$ 的最大值为 $g(0)=-2m+1$,由(*)知 $g(0)<0$,即 $-2m+1<0\Rightarrow m>\frac{1}{2}$,与 $m<-2$ 矛盾. …22′

综上述知:存在实数 m,且 $m>2$ 时,对所有 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$,不等式 $f(\cos2\theta-3)+f(4m-2m\sin\theta)>0$ 恒成立. …25′

第十届“创新杯”全国数学邀请赛(复试)
高中二年级试卷标准答案

一、选择题($5' \times 8 = 40'$)

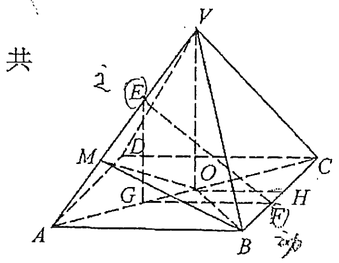
题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	C	B	C	C	C	D

二、填空题($5' \times 8 = 40'$)

题号	9	10	11	12
答案	$\sin 1 < 3\sin\frac{1}{3} < 5\sin\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$	$(1,\frac{\sqrt{5}+1}{2})$	$45°$

题号	13	14	15	16
答案	-49	$13+\sqrt{26}$	$(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$	$\frac{3}{2}, 1$

三、解答题(第17题20分,第18、19题各25分,共70分)



17. 解:(1)作 VO、EG 垂直于底面分别于点 O, G,则 A、G、O 共线,且 $AG=2GO$.

作 $GF\perp BC$ 于点 F,$OH\perp BC$ 于点 H,则 $BF=2FH$.

$\because BC\perp EG, BC\perp GF$,

$\therefore BC\perp$ 平面 EGF.

$\because BC\perp EF$,

$\therefore AD\perp EF$,此时 $BF=\frac{1}{3}BC$ …10′

(2)连 BO,作 $BM\perp VA$ 于点 M,连 OM,可证 $BO\perp$ 平面 VAC

$\therefore OM\perp VA$,

$\therefore \angle OMB$ 为二面角 $C-VA-B$ 的平面角 …15′

设 $AB=1$,则 $OB=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\because \angle MAB=60°$

$\therefore MB=\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\angle OMB=\frac{OB}{MB}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$,

因此 $\cos\angle OMB=\frac{\sqrt{3}}{3}$. …20′

18. (1)已知 $a_{n+1}=2a_n+3n-4$

令 $a_{n+1}+A(n+1)+B=2[a_n+An+B]$

$\therefore a_{n+1}=2a_n+An+B-A$. $\therefore A=3, B-A=-4, B=-1$.

$\therefore a_{n+1}+3(n+1)-1=2[a_n+3n-1]$

$\therefore$ 数列$\{a_n+3n-1\}$是公比为2的等比数列,首项为 $a_1+3-1=1$.

$\therefore a_n+3n-1=2^{n-1}$

$\therefore a_n=2^{n-1}-3n+1(n\in N^*)$. …10′

(2)由(1)知:$1\leqslant n\leqslant 4$ 时,$a_n<0$;$n>4$ 时,$a_n>0$.

当 $1\leqslant n\leqslant 4$ 时,

$$S_n=-\sum_{k=1}^{n}a_k=-\sum_{k=1}^{n}(2^{k-1}-3k+1)$$

$$=-\left\{\frac{1-2^n}{1-2}-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n\right\}=1-2^n+\frac{3n(n+1)}{2}-n$$

$$=1-2^n+\frac{n(3n+1)}{2}.$$ …15′

当 $n>4$ 时,

$S_n=|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+|a_5|+\cdots+|a_n|$

$=-a_1-a_2-a_3-a_4+a_5+\cdots+a_n$

$=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\cdots+a_n-2(a_1+a_2+a_3+a_4)$

$=a_1+\cdots+a_n+2(-a_1-a_2-a_3-a_4)$

$=a_1+\cdots+a_n+2S_4$

其中 $a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}(2^{k-1}-3k+1)=2^n-1-\frac{n(3n+1)}{2}$,

$S_4=1-2^4+\frac{4(12+1)}{2}=11$

故 $S_n=2^n-1-\frac{n(3n+1)}{2}+22=2^n+21-\frac{n(3n+1)}{2}$ …25′

19. 解:(1)设 $C(x,y)$,$(x,y)=(\alpha,0)+(0,-2\beta)$ $\therefore \begin{cases}x=\alpha\\ y=-2\beta\end{cases}$

$\because \alpha-2\beta=1$,$\therefore x+y=1$ 即为 C 点轨迹方程. …5′

(2)由 $\begin{cases}x+y=1\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$ 得 $(a^2+b^2)x^2-2a^2x+a^2-a^2b^2=0$. 设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$

则 $x_1+x_2=\frac{2a^2}{a^2+b^2}$,$x_1x_2=\frac{a^2-a^2b^2}{a^2+b^2}$. 由已知 $\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{ON}$.

$\therefore x_1x_2+y_1y_2=0$ $\therefore x_1x_2+(1-x_1)(1-x_2)=0$.

$\therefore 1-(x_1+x_2)+2x_1x_2=0$ $\therefore 1-\frac{2a^2}{a^2+b^2}+2\cdot\frac{a^2-a^2b^2}{a^2+b^2}=0$.

$\therefore \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=2$ …15′

(3)$e\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\therefore \frac{a^2-b^2}{a^2}\leqslant\frac{3}{4}$ $\because \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=2$ $\because b^2=\frac{a^2}{2a^2-1}$.

$\therefore 1-\frac{1}{2a^2-1}\leqslant\frac{3}{4}$ $\therefore 2a^2-1\leqslant 4$ $\therefore 0\leqslant a\leqslant\frac{\sqrt{10}}{2}$. …20′

又 $b^2=\frac{a^2}{2a^2-1}>0$ $\therefore a^2>\frac{a^2}{2a^2-1}$ $\therefore a>1$ $\therefore 2<2a\leqslant\sqrt{10}$. …25′